

Ch. 5: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et appli.

I- Généralités sur les fonctions holomorphes sur ouvert de $\mathbb{C}$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

a) Définitions et premières propriétés

Def. 1: f est dite holomorphe en $a \in \Omega$ si il existe $\rho(a)$ en complexe tq:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a) \text{ existe}$$

f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe en tout a de Ω .
 On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Def. 2: En posant $F: (x, y) \mapsto f(x+iy)$. On dit que f est Riemann-différentiable $a = a_1 + ia_2 \in \Omega$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en (a_1, a_2)

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$. On note $R(\Omega)$ l'ensemble des fonction Riemann-différentiables.

Prop. 3: (conditions de Cauchy-Riemann). $a \in \Omega$.

f est Riemann différentiable en a si f est holomorphe en a .

Prop. 4: Si $f, g \in H(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\lambda f + g \in H(\Omega)$. De plus:

$$\begin{aligned} \bullet (f+g)' &= f' + g' & \bullet (fg)' &= f'g + g'f \\ \bullet (\lambda f)' &= \lambda f' & \bullet \frac{f'}{g'} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{si } g \text{ ne s'annule pas sur } \Omega) \end{aligned}$$

Mettre exemple des prop.

Prop. 5: Soit Ω_1 un ouvert de $\mathbb{C}$ tq $f \in H(\Omega_1)$ avec $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ et $g \in H(\Omega_2)$ alors $g \circ f \in H(\Omega_1)$ et $(g \circ f)' = g'(g \circ f)$

Def. 6: On dit que f est analytique sur Ω si pour tout $a \in \Omega$ il existe $\delta > 0$ et une série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ de rayon de convergence $\geq \delta$ tq $|z-a| \leq \delta$ implique que pour $z \in \Omega$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.
 On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω .

Thm. 7: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(z)$. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ le disque de convergence alors $S \in H(\Omega)$ et $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. De plus $S \in A(\Omega)$, plus précisément si $a \in \Omega$, $|z-a| < R-|a|$ alors $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$.

Rmq. 8: Ici on a $A(\Omega) \subset H(\Omega)$, on verra plus tard qu'on a en fait l'égalité.

b) Inversion et logarithme A, B ouverts de $\mathbb{C}$.

Thm. 9: Soit $f: A \rightarrow B$ une bijection holomorphe. Posons $b = f(a)$. Si f^{-1} est continue en b et $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est holomorphe en b et $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Thm/Def. 10: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq \alpha}$. Alors il existe une fonction L_α holomorphe sur Ω_α appelée détermination à l'ordre α du logarithme tq $e^{L_\alpha(w)} = w$, pour tout $w \in \Omega_\alpha$. De plus:
 $L(w) = \ln|w| + i\theta(w)$ avec $\alpha < \theta(w) < \alpha + 2\pi$
 et $L'(w) = \frac{1}{w}$ ($w \in \Omega_\alpha$)

Def. 11: On appelle détermination principale du logarithme $L_{-\pi}$. On le note Log .

II - Formule de Cauchy et conséquences

a) Théorème de Cauchy $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Def. 12: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est appelé chemin si γ est continue. $\gamma(a)$ s'appelle origine, $\gamma(b)$ extrémité. On note $\gamma^* = \gamma([a, b])$ et appelle image. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que γ est un chemin fermé.

Def. 13: Un chemin γ par morceau est appelé courbe.

Def. 14: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ 2 courbes. γ et γ_1 sont dit équivalent si il existe $\theta: [a, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijective et $\gamma_1 = \gamma \circ \theta$.

[Ques]
p. 61

[Ques]
p. 86
87

[QUES]
p.91
-94

Def. 15: Un chemin fermé $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dit simple si γ est injectif sur $[a, b]$.

Def. 16: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe et si f est continue sur γ^* , on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ est par définition
$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Prop. 17: Si γ est une courbe de longueur $L(\gamma)$ et si f continue sur γ^* on a
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \times L(\gamma)$$

Prop. 18: $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe d'origine u et d'extrémité v . Si $f \in H(\Omega)$ et $\gamma^* \subset \Omega$ on a
$$\int_{\gamma} f(z) dz = f(u) - f(v).$$

Def. 19: γ courbe fermée, $a \notin \gamma^*$. On appelle indice de a par rapport à γ la quantité:
$$\text{Ind}_{\gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$$

Thm. 20: L'indice possède les ppt suivantes:

- 1) $\text{Ind}_{\gamma}(a) \in \mathbb{Z}$
- 2) Ind_{γ} est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- 3) Ind_{γ} est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- 4) $|1 - \gamma(t)| < 1 \Rightarrow \text{Ind}_{\gamma}(0) = 0$

Rmq. 21: $\text{Ind}_{\gamma}(a)$ compte le nombre de tours orientés de γ autour de a .

b) Théorème de Cauchy

Thm. 22: (Cauchy triangulaire) Soit $\Delta := \Delta(u, v, w)$ un triangle plein contenu dans Ω . Soit $a \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Si γ est le bord du triangle orienté positivement on a
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Thm. 23: (Cauchy convexe). Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ tq $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ et continue sur Ω alors
• Il existe $F \in H(\Omega)$ tq $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$.

(*) ajouter notion de cycle p. 135

• $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour toutes courbes fermées γ d'image $\gamma^* \subset \Omega$

Thm. 24: (Cauchy local) Soit $D(a, r) \subset \Omega$ de bord positivement orienté γ , paramétré par $\gamma(t) = a + re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Soit $f \in H(\Omega)$. Alors,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r)$$

Plus généralement pour $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} dw \quad \forall z \in D(a, r)$$

Cor. 25: $H(\Omega) \subset A(\Omega)$

Cor. 26: $H(\Omega) = A(\Omega) = R(\Omega)$

Thm. 27: (Morera) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue tq $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$ alors $f \in H(\Omega)$.

Thm. 28: (Inégalités de Cauchy) Soit f holomorphe au voisinage du disque $D(a, R)$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ pour $|z-a| \leq R$

Pour $r \in [0, R]$ posons $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. Alors,
$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Thm. 29: (Cauchy homologique) Soit Γ un cycle tq pour tout $z \in \Omega$, $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$. Alors, $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, pour tout $f \in H(\Omega)$

Thm. 30: (Formule de Cauchy) Γ un cycle tq pour tout $z \in \Omega$, $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$. Soit $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega \cap \Gamma^*$ alors,

$$f(z_0) \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

C- Conséquences

Thm. 31: (Holomorphie sous le signe intégral) Soit (T, μ) un espace mesuré. Posons pour $z \in \Omega$ $F(z) = \int f(z, t) d\mu(t)$. Si,

- Pour $z \in \Omega$ $f(z, \cdot) \in L^1(\mu)$
- Pour presque tout $t \in T$ $z \mapsto f(z, t) \in H(\Omega)$
- Pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ $|f(z, t)| \leq g_K(t)$ pour p.p. t

[QUES]
p.101
-108

DEA

[QUES]
p.142
-143

[QUES]
p.147

Alors $f \in H(\mathbb{R})$ et $f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) \quad \forall z \in \mathbb{R}$.

Thm. 32: (Liouville) Toutes fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ bornée est constante.

Thm. 33: (Principe des zéros) Soit $f \in H(\mathbb{R})$ non identiquement nulle.

Posons $Z(f) := \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f . Alors,

- Si $a \in Z(f)$, $\exists k \geq 1$ et $g \in H(\mathbb{R})$ tq $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $g(a) \neq 0$.
- $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans $\mathbb{R}$.

Thm. 34: (Prolongement analytique) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe. Soient $f, g \in H(\mathbb{R})$ tq $f = g$ sur $E \subset \mathbb{R}$ tq E possède un point d'accumulation dans $\mathbb{R}$. Alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

Appl. 35: Soient $a > 0, \lambda > 0$, considérons la densité

$$\gamma_{a,\lambda}: x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \text{ de la loi } \Gamma(a, \lambda).$$

- La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{a,\lambda}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment d'ordre n : $\frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\lambda^n}$

Thm. 36: (Principe du maximum) $\mathbb{R}$ ouvert bornée de $\mathbb{C}$, $f \in H(\mathbb{R}) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$.

Alors $\forall z \in \mathbb{R}$, $|f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{\mathbb{R}}} |f(z)| \in \mathbb{R}^+$

Thm. 37: (Weierstrass) Soit $(f_n) \subset H(\mathbb{R})$ qui conv vers f sur tout compact alors $f \in H(\mathbb{R})$ et f_n conv vers f .

Thm. 38: (Développement de Laurent) Soit $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$.

$\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z-a| < b\}$. Soit $f \in H(\mathbb{R})$. Alors il existe une

unique $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tq $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ (cvn sur tout compact). De plus pour $a < r < b$, $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

III. Fonction méromorphe

a. Singularité, pôles et résidus

Def. 39: Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \in H(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. On dit que a est une singularité artificielle pour f si $\exists g \in H(\mathbb{R})$ tq $f(z) = g(z)$ pour $z \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

Ex. 40: $z \mapsto \frac{1}{z}$ a une singularité artificielle en 0, il suffit de poser:

Def. 41: Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \in H(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ on dit que a est un pôle d'ordre m pour f si il existe $c_1, \dots, c_m$ avec $c_m \neq 0$ tq $f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ ait une singularité artificielle en a .

c_{-1} s'appelle résidu de f en a noté $\text{Res}(f, a)$.

Une singularité qui n'est pas un pôle est appelée singularité essentielle.

Def. 42: On dit que f est méromorphe sur $\mathbb{R}$ si il existe

$A \subset \mathbb{R}$ tq:

- A n'a que des points isolés dans $\mathbb{R}$.
- $f \in H(\mathbb{R} \setminus A)$
- f a un pôle en chaque point de A .

Ex. 43: $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$

Prop. 44: Soit $f \in H(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ où $a \in \mathbb{R}$. Si f est bornée dans un voisinage $V \setminus \{a\}$. Alors a est une singularité artificielle pour f .

Prop. 45: Soit $f \in H(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ où $a \in \mathbb{R}$. f a un pôle en a si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. L'ordre du pôle est alors égal à la multiplicité de a comme zéro de f .

Si $f \in H(\mathbb{C})$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$ alors f est un polynôme.

Prop. 46: Soit $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si a est un zéro simple de h et que $g(a) \neq 0$ alors a est un pôle simple de f de résidu $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

b. Le théorème des résidus

Thm. 47: (Théorème des résidus) Soit f méromorphe sur $\mathbb{R}$ et A l'ensemble de ses pôles. Soit γ un cycle dans $\mathbb{R}$ tq pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$, γ n'a pas de point à l'intérieur.

Alors $\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \text{Ind}_\gamma(a) \text{Res}(f, a)$

Ex. 48: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos(t)} dt = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

Références:

[COU3]: Quappeler, analyse complexe

[COU3]: Courcier, exercices de probas

[COU3]
p. 173
- 176

[COU3]
p. 177

[COU3]
p. 181